Matemātika 2065
Praktiskie darbi

2. nodarbība

2021. gada pavasaris
18. februāris

Atcerieties sekojošās pazīmes rindu konverğencei (*convergence tests for series*).

- **Konvergences salīdzināšanas pazīme** (*Divergence test*)
- **Dalembēra pazīme** (*Limit comparison test*)
- **Košī pazīme** (*Root test*)

---

1. **Iesildīšanās:** Izlemiet vai sekojošie apgalvojumi ir patiesi vai aplami.
   (a) Virkne $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ diverğē.
   (b) Rinda $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ diverğē.
   (c) Rinda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverğē visiem $p \in \mathbf{R}$.

2. Lai $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ir nenegatīva, neaugoša funckija un lai $n \in \mathbf{N}$ ir brīvi fiksēts.
   (a) Pierādiet, ka rinda $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ konverğē tad un tikai tad, ja $\displaystyle\int_N^{\infty} f(x)\, dx$ konverğē.
   (b) Pierādiet, ka $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n$ konverğē.
   (c) Pierādiet, ka $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}\, dy$ konverğē.
   (d) Izlemiet un pierādiet, ka $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ konverğē vai diverğē.

3. Jums ir dotas dievas nevienādības

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \qquad \text{visiem } x > 0, \tag{1}$$

$$\ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n-1) < \int_1^n \ln(x)\, dx < \ln(2) + \cdots + \ln(n), \qquad \text{visiem } n \geqslant 2. \tag{2}$$

   Izmantojiet šīs nevienādības sekojošos uzdevumos.
   (a) Izmantojiet nevienādību (1) lai pierādītu, ka $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right] = 1$.
   (b) Iamntojiet (a) daļu lai pierādītu, ka $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = e$.
   (c) Pierādiet, ka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ konverğē visiem $0 < a < e$ un diverğē visiem $a > e$.
   (d) Izmantojiet nevienādību (2) lai pierādītu, ka $\displaystyle\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$.
   (e) Izmantojiet (d) daļu lai secinātu, vai rinda no (c) daļas konverğē kad $a = e$.

4. Lai $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ ir nepārtraukta funkcija, kur $a < b$ ir reāli skaitļi, un $f(x) \geqslant 0$ visiem $x \in [a,b]$. Ja $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$, pierādiet, ka $f(x) = 0$ visiem $x \in [a,b]$.

5. Izmantojot konverğences un diverğences kārtulas seciniet, kuras no sekojošām rindām konverğē un kuras diverğē. Norādiet, kura kārtula kurai rindai tiek lietota.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+4}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{3n}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^2)$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n n^3}$