Matemātika 1105
Praktiskie darbi

10. nodarbība

2021. gada pavasaris
11. marts

1. **Iesildīšanās:**

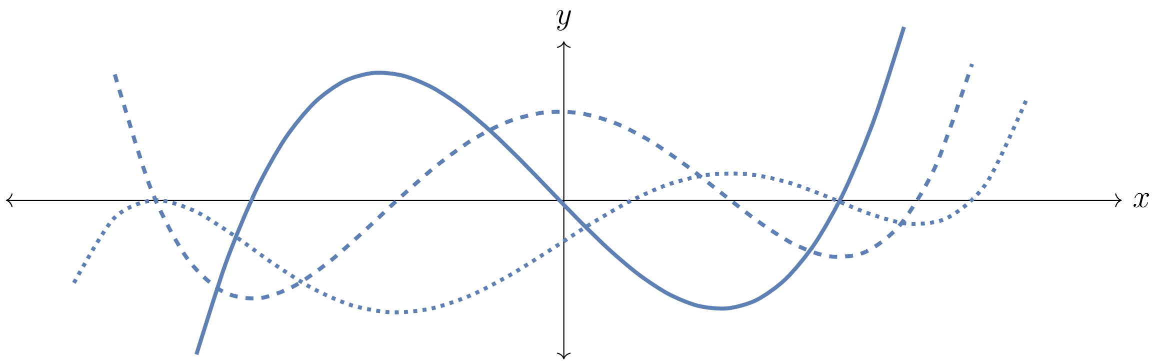
   (a) Kurām sekojošām robežām var izmantot Lopitāla kārtulu:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2} \qquad \lim_{x\to -9}\frac{x^2-7x-18}{\ln(|x|-9)^{-1}} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x$$

   (b) Kura no Lopitāla kārtulas nenoteiktībām ir sekojošām robežām:

$$\lim_{x\to 0} x^x \sin(x)^{2x} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x(\ln(x)+1)$$

   (c) Zemāk ir funkciju f, f' un f'' grafiki. Kurš grafiks ir kurai funkcijai?



2. Lai $p, q \in \mathbf{R}_{>0}$. Aprēķiniet sekojošās robežas izmantojot Lopitāla kārtulu.

   (a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^p-1}{x^q-1}$

   (b) $\lim_{x\to\infty}(px)^{q/x}$

   (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(px)-\cos(qx)}{x^2}$

   (d) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{\ln(p)}{1+\ln(x)}}$

   (e) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^p}$

   (f) $\lim_{x\to 0}\cos(px)^{q\csc(x)}$

3. Lai $n \in \mathbf{N}$ ir brīvi fiksēts. Izmantojot Lopitāla kārtulu pierādiet, ka:

   (a) eksponenciālā funckija aug *ātrāk* par jebkuru polinomu: $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty$

   (b) logaritmiskā funkcija aug *lēnāk* par jebkuru polinomu: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

4. Izmantojot Lagranža teorēmu pierādiet, ka:

   (a) $e^x \geqslant 1+x$ visiem $x \in \mathbf{R}$

   (b) $\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x-1$ visiem $x \in \mathbf{R}_{>1}$

***5.** Lai $f(x) = x^2$ un lai $a, b \in \mathbf{R}$ ar $a < b$.

   (a) Pierādiet, ka skaitlis $c \in (a,b)$ kura eksistenci garantē Lagranža teorēma ir a un b aritmētiskais vidējais. Tas ir, $c = \frac{a+b}{2}$.

   (b) Lai $g(x)$ ir diferencējama funkcija ar $g'(x) = 2x$ visiem $x \in [a,b]$. Pierādiet, ka $g(x) = f(x) + p$ kādam $p \in \mathbf{R}$.

   Majiens: Izmantojiet Lagranža teorēmu funckijai $h(x) = f(x) - g(x)$.