Matemātika 1105
Praktiskie darbi

6. nodarbība

2021. gada pavasaris
25. februāris

Lai $n \in \mathbf{N}$ un $X, Y \subseteq \mathbf{R}$. Funkcijas $f\colon X \to Y$

- **atvasinājumu** apzīmē $f'(x)$ vai $\frac{d}{dx}f(x)$ vai $f^{(1)}(x)$
- n**-tās kārtas atvasinājumu** apzīmē $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ vai $f^{(n)}(x)$

---

1. **Iesildīšanās:** Lai $f(x) = \left\{\begin{smallmatrix} g(x) & x<0, \\ h(x) & x\geqslant 0, \end{smallmatrix}\right.$ kur $g, h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ir nepārtrauktas un atvasināmas funkcijas. Izlemiet, kuri no sekojošiem apgalvojumiem ir patiesi un kuri ir aplami.

   (a) Ja $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$, tad f ir nepārtraukta punktā $x = 0$.

   (b) Ja $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$, tad f nav atvasināma punktā $x = 0$.

   (c) Ja $\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h'(x)$, tad f ir atvasināma punktā $x = 0$.

   (d) Ja f ir atvasināma punktā $x = 0$, tad $f'(0) = h'(0)$.

   (e) Nav iespējams, ka $f \to \infty$ kad $x \to 0$ no kreisās puses.

   (f) Nav iespējams, ka $f' \to \infty$ kad $x \to 0$ no kreisās puses.

2. Lai $f(x) = x + \sin(x)$ un $g(x) = 3x^2 + 2$.

   (a) Atrodiet visus punktus uz f grafika, kur pieskare ir paralēla taisnei $y = x + 15$.

   (b) Atrodiet visus punktus uz g grafika, kur pieskare šķērso punktu $(-1, -7)$.

3. Lai $n \in \mathbf{N}$ ir brīvi fiksēts un lai $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

   (a) Aprēķiniet $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$.

   (b) Pierādiet, ka $f^{(n)}(0) = 0$.

4. Lai $f(x) = \begin{cases} x + x^2\sin(1/x^2) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

   (a) Aprēķiniet $f'(x)$ un $f'(0)$.

   (b) Pierādiet, ka jebkuram $\delta > 0$ eksistē $x_0 \in [-\delta, \delta]$ ar $f'(x_0) < 0$.

5. Lai $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ir funkcija.

   (a) Ja f ir nepāra funkcija un atvasināma pierādiet, ka f' ir pāra funkcija.

   (b) Ja f ir pāra funkcija un atvasināma pierādiet, ka f' ir nepāra funkcija.

   (c) Atrodiet f piemēru, kur f' ir pāra funkcija, bet f nav ne pāra, ne nepāra funkcija.

***6.** Lai $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

   (a) Atvasiniet funkciju f. Vai f ir atvasināma punktā $x = 0$?

   (b) Lai $g(x) = \left\{\begin{smallmatrix} f(x) & x<0, \\ h(x) & x\geqslant 0. \end{smallmatrix}\right.$ Atrodiet $h(x)$ piemēru, tā lai $g(x)$ būtu atvasināma visur.