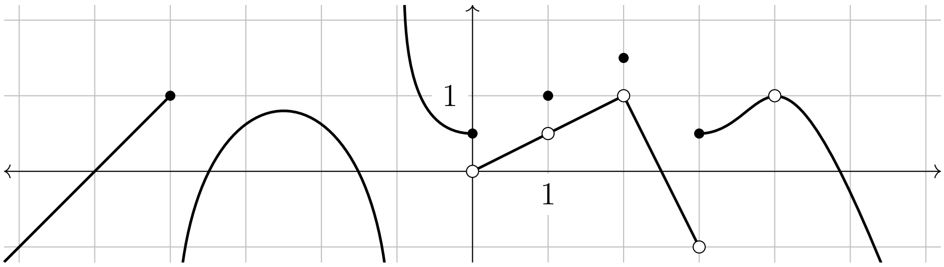
Matemātika 1027 **Praktiskie darbi 30** 2020. g. rudens

21. decembris

1. **Iesildīšanās 1:** Aplūkojiet funkcijas f grafiku.



   (a) Kas ir funkcijas f definīcijas kopa?
   (b) Kuri ir funkcijas I. veida novēršamie pārtraukuma punkti?
   (c) Kuri ir funkcijas I. veida nenovēršamie pārtraukuma punkti?
   (d) Kuri ir funkcijas II. veida pārtraukuma punkti?

2. **Iesildīšanās 2:** Uzrakstiet nosacījumus un secinājumu sekojošām teorēmām:

   (a) Bolcano–Veierštrāsa teorēma (virknēm)
   (b) Bolcano–Koši teorēma (segmentā nepārtrauktām funckijām)
   (c) I Veierštrāsa teorēma (segmentā nepārtrauktām funkcijām)
   (d) II Veierštrāsa teorēma (segmentā nepārtrauktām funkcijām)

3. Izmantojiet 2.(a) sekojošiem uzdevumiem. Lai $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ir virkne ar $a_n = \sin(n)$.

   (a) Pierādiet, ka šai virknei eksistē konverģenta apakšvirkne.
   (b) Vai ir iespējams zināt, kas ir konverģentās apakšvirknes robeža?
   (c) Lai $a_n = c \cdot \sin(n^d)$ brīvi fiksētiem $c, d \in \mathbf{R}$. Pierādiet, ka vēl arvien virknei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eksistē konverģenta apakšvirkne.

4. Izmantojiet 2.(b) sekojošiem uzdevumiem.

   (a) Cilvēks 1 stundā nostaigāja 4km. Pierādiet, ka bija brīdis, kurā cilvēks bija nostaigājis tieši πkm.
   (b) Pierādiet, ka funkcijai $f(x) = 2\sin(2x + \pi) + 10x - 2$ ir sakne intervālī $[-\pi, \pi]$.
   (c) Lai $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ir polinoms, brīvi fiksētiem $a, b, c, d \in \mathbf{R}_{>0}$. Pierādiet, ka funkcijai g ir vismaz viena sakne. Tas ir, pierādiet, ka eksistē $x_0 \in \mathbf{R}$ tā lai $g(x_0) = 0$.

5. Šis uzdevums ir saistīts ar 2.(c) un 2.(d). Lai $f\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ ar $f(x) = \frac{1}{x}$, un $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ar $g(x) = (x-2)^2$. Atļauts pieņemt, ka f ir dilstoša.

   (a) Lai $I = [1, 3]$.
      i. Vai f ir ierobežota intervālī I? Ja jā, kas ir f mazākās un lielākās vērtībās?
      ii. Vai g ir ierobežota intervālī I? Ja jā, kas ir g mazākās un lielākās vērtībās?
   (b) Lai $I = [1, 3)$.
      i. Vai f ir ierobežota intervālī I? Ja jā, kas ir f mazākās un lielākās vērtībās?
      ii. Vai g ir ierobežota intervālī I? Ja jā, kas ir g mazākās un lielākās vērtībās?
   (c) Pierādiet, ka $1 + x < e^x$ ja $x > 0$. Atļauts pieņemt, ka $e^x - x\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ ir augoša.