Matemātika 1027

Praktiskie darbi 26

2020. g. rudens

7. decembris

Atcerieties sekojošos faktus, kur $f\colon D_f \to \mathbf{R}$, $g\colon D_g \to \mathbf{R}$ ir funkcijas.

Eksponenciālais skaitlis: Ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, tad $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$.

Kāpinātāju robežas: Ja izpildās sekojošie nosacījumi:

- $a \in \overline{\mathbf{R}}$,
- $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R}_{>0}$,
- $f(x) > 0$ visiem $x \in U_\epsilon(a)$ kādam $\epsilon > 0$,
- $\lim_{x\to a} g(x) = c \in \mathbf{R}$,

tad

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

---

1. **Iesildīšanās 1:** Aprēķiniet sekojošās robežas.

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x)^{\frac{2x+1}{x}}$

2. **Iesildīšanās 2:** Katrai no sekojošām funkcijām identificējiet a tā lai funckija būtu bezgalīgi maza, kad $x \to a$.

   $$f(x) = 7x + 2 \qquad g(x) = e^x(1 - e^{-x}) \qquad h(x) = (x-5)(x-6)$$

3. Atrodiet piemēru katrai no sekojošām tipa funkcijām.

   (a) f ir augoša un ierobežota

   (b) g ir dilstoša un neierobežota

   (c) h ir neaugoša un eksistē $x_1, x_2 \in D_h$ ar $h(x_1) = h(x_2)$

   (d) k ir nedilstoša un eksistē $x_1, x_2 \in D_k$ ar $k(x_1) = k(x_2)$

4. Lai $a = 1$. Salīdziniet katras divas no sekojošām funkcijām un seciniet, vai abas ir vienādas kārtas bezgalīgi mazas funkcijas kad $x \to a$, vai identificējiet kura ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija kad $x \to a$.

   $$\alpha(x) = x - 1 \qquad \beta(x) = x^2 - 1 \qquad \gamma(x) = (x-1)^3 \qquad \zeta(x) = \frac{\sin(\pi x)}{-\pi} \qquad \eta(x) = \frac{1-x}{x-2}$$

5. Pierādiet, ka sekojošās funkcijas ir ekvivalentas, kad $x \to 0$.

   (a) $\arcsin(x)$ un x (b) $\arctan(x^2)$ un x^2 (c) $e^{x+1} - e$ un ex

6. Aprēķiniet sekojošās robežas.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[7]{1-x^2}}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cot^2(\frac{3}{2x})}{x^2}$