Matemātika 1027

Praktiskie darbi 25

2020. g. rudens

2. decembris

Šiem uzdevumiem vajadzīgs sekojošais novērojums, pasniegts divos veidos:

1. versija: Lai $f\colon D_f \to \mathbf{R}$ un $g\colon D_g \to \mathbf{R}$ ir funkcijas ar $D_f, D_g \subseteq \mathbf{R}$. Jebkuram $a \in \overline{\mathbf{R}}$,

$$\left(\lim_{x\to a} g(x) = b \text{ un } \lim_{x\to b} f(x) = f(b)\right) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

2. versija: Lai $f\colon D_f \to \mathbf{R}$ un $g\colon D_g \to \mathbf{R}$ ir funkcijas ar $D_f, D_g \subseteq \mathbf{R}$. Jebkuram $a \in \overline{\mathbf{R}}$,

$$\left(\lim_{x\to a} g(x) = b \text{ un } \lim_{x\to b} f(x) = c\right) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{x\to b} f(x).$$

Šo sauc par *saliktu funkciju robežu* (angliski "limit of a composition of functions") jeb *mainīgo izmaiņa* (angliski "change of variables").

---

1. **Iesildīšanās:** Izlemiet vai sekojošie apgalvojumi ir patiesi vai aplami.
   (a) Ja virknei $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ izpildās $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ un $x_n > 0$ visiem $n \in \mathbf{N}$, tad virkne ir augoša.
   (b) Ja funkcijai $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nekad neizpildās $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, tad visas robežas eksistē.

2. (a) Lai $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ir virkne ar $a_n = (1+\frac{x}{n})^n$, jebkuram $x > -1$. Pierādiet, ka šī virkne ir nedilstoša, lietojot *Bernulī nevienādību*: $(1+x)^r \geqslant 1 + rx \ \ \forall\, r \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0},\ \forall\, x \in \mathbf{R}_{\geqslant -1}$.
   (b) Izmantojot (a) daļu un $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ robežu pierādiet, ka $\ln(1+x) \leqslant x$ visiem $x > -1$.
   (c) Izmantojot (b) daļu un $x = \frac{-y}{y+1}$ pierādiet, ka $\ln(1+y) \geqslant \frac{y}{y+1}$ visiem $y > -1$.
   (d) Izmantojot (a) un (b) daļas un divu policistu teorēmu pierādiet, ka

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

   (e) Izmantojot (d) daļu aprēķiniet sekojošās robežas.

   i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ iii. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

3. Katrai uzdevuma daļai aprēķiniet $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ un $f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$.
   (a) Lai $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & x\neq 3 \\ 2 & x=3 \end{cases}$ un $g(x) = 2x^2 - 5$ un $a = 2$.
   (b) Lai $f(x) = \arcsin(x)$ un $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ un $a = -1$.
   (c) Lai $f(x) = e^x$ un $g(x) = x\ln(1+x)$ un $a = 0$.

4. Aprēķiniet sekojošās robežas.
   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{6}{2-x}\right)^{x+1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\cot^2(x)}$
   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos(\sqrt{x})}$