Matemātika 1027 | **2020. g. rudens**

Praktiskie darbi 12

14. oktobris

Jums ir dota virkne $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un skaitlis $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Skaitli a saucam par virknes **robežu**, ja:

- $a \in \mathbf{R}$: katram $\epsilon > 0$ eksistē $n_0 \in \mathbf{N}$, tā lai $|x_n - a| < \epsilon$ visiem $n \geqslant n_0$
- $a = +\infty$: katram $\epsilon > 0$ eksistē $n_0 \in \mathbf{N}$, tā lai $x_n > \frac{1}{\epsilon}$ visiem $n \geqslant n_0$
- $a = -\infty$: katram $\epsilon > 0$ eksistē $n_0 \in \mathbf{N}$, tā lai $x_n < -\frac{1}{\epsilon}$ visiem $n \geqslant n_0$

---

1. **Iesildīšanās:** Izlemiet, vai sekojošie apgalvojumi ir patiesi vai aplami.

   (a) Ja virknei $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ir robeža, tad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

   (b) Ja virknei $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ir robeža $a \in \mathbf{R}$, tad virknei $(x_n - a)_{n\in\mathbf{N}}$ ir robeža 0.

   (c) Jebkuram skaitlim $a \in \overline{\mathbf{R}}$ eksistē virkne, kuras robeža ir a.

2. Jums ir dotas trīs virknes $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ar $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ visiem $n \in \mathbf{N}$. Lietojot virknes robežas definīciju, atbildiet uz sekojošiem jautājumiem.

   (a) Ja $x_n \to a$ un $z_n \to a$ kad $n \to \infty$, kas ir virknes $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ robeža?

   (b) Ja $z_n \to \infty$, vai var ko secināt par $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ robežu? Kāpēc?

   (c) Ja $z_n \to -\infty$, vai var ko secināt par $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ robežu? Kāpēc?

   (d) Ja zināms, ka virknei $(x_n - y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ir robeža 0 un $x_n \to a$ kad $n \to \infty$, ko var secināt par $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ robežu? Kāpēc?

3. Izmantojot virknes robežas definīcju, pierādiet sekojošos apgalvojumus.

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$ visiem $p \in \mathbf{R}$ ar $|p| < 1$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = \infty$ visiem $p \in \mathbf{R}$ ar $p > 1$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{p^n} = 0$ visiem $p \in \mathbf{R}$ ar $p > 1$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} np^n = 0$ visiem $p \in \mathbf{R}$ ar $|p| < 1$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p^n}{n!} = 0$ visiem $p \in \mathbf{R}$