Matemātika 1027 | # Praktiskie darbi 8 | **2020. g. rudens**

30. septembris

Šī darba lapa lietos sekojošās definīcijas, kur $A \subseteq B$ ir kopas.

- Ja A ir galīga kopa, tās **apjoms** ir skaitlis $|A| \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, kas atbilst elementu skaitam.
- Ja A ir bezgalīga un sanumurējama kopa, tās **apjoms** ir $\aleph_0 := |\mathbf{N}|$.
- Ja A ir bezgalīga un eksistē bijekcija $A \to \mathbf{R}$, tās **apjoms** ir $\mathfrak{c} := |\mathbf{R}|$.

Atcerieties, ka $|\mathbf{N}| < |\mathbf{R}|$ un $A < |\mathbf{N}|$ ja A ir galīga kopa.
Ja var salīdzināt kopas A un B elementus ar "$<$", tad:

- Kopa A ir **blīva**, ja $a_1, a_2 \in A \implies \exists\, c \in A$ ar $a_1 < c < a_2$.
- Kopa A ir **blīva kopā** B, ja $b_1, b_2 \in B \implies \exists\, c \in A$ ar $b_1 < c < b_2$.

---

1. **Iesildīšanās:** Jums ir dots reāls skaitlis a.
   (a) Vai eksistē bijekcija no $(0,1)$ uz $(0,a)$? Ja jā, kā to var uzrakstīt? Ja nē, kāpēc?
   (b) Vai eksistē bijekcija no $(0,a)$ uz $\mathbf{R}$? Jūs drīkstiet pieņemt, ka eksistē bijekcija no $(0,1)$ uz $\mathbf{R}$.
2. (a) Salīdziniet sekojošo kopu apjomu, lietojot "$<$" vai "$=$":
   $$(0,1) \qquad \mathbf{R} \qquad \mathbf{Z} \qquad \mathbf{R}\times\{0,1\} \qquad \mathbf{N} \qquad \mathbf{N}\times\mathbf{N}$$
   (b) Kuras no šīm kopam ir sanumurējamas un kuras nav?
3. Ar šo uzdevumu Jūs pierādīsiet, ka $\mathbf{R} \sim \mathbf{R}\times\mathbf{Z}$.
   (a) Pierādiet, ka $(0,\infty)$ un $[0,\infty)$ ir ekvivalentas kopas.
   (b) Pierādiet, ka $(0,\infty)$ un $\mathbf{R}$ ir ekvivalentas kopas.
   (c) Pierādiet, ka $\mathbf{R}$ un $\mathbf{R}\times\{0,1\}$ ir ekvivalentas kopas.
   (d) Pierādiet, ka $\mathbf{R}$ un $\mathbf{R}\times\mathbf{Z}$ ir ekvivalentas kopas. Atcerieties, ka $(0,1) \sim \mathbf{R}$.
4. (a) Pierādiet, ka kopa $(0,1) \subseteq \mathbf{R}$ ir blīva.
   (b) Pierādiet, ka $\mathbf{Q}$ ir blīva kopā $\mathbf{R}$.
   (c) Pierādiet ar pretpiemēru, ka $\mathbf{Z}$ nav blīva kopā $\mathbf{R}$.
5. Pierādiet, lietojot **indukciju**, ka $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ dalās ar 5 visiem $n \in \mathbf{N}$.