Matemātika 1027 **2020. g. rudens**

Praktiskie darbi 7

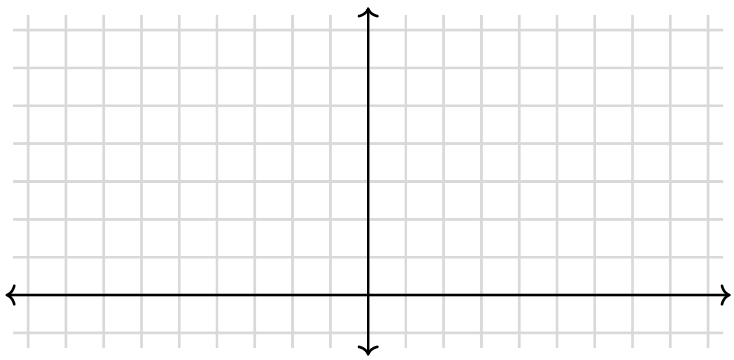
29. septembris

Šī darba lapa lietos sekojošās definīcijas, kur A, B ir kopas.

- Kopu A, B **reizinājums** ir kopa $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ un } b \in B\}$.
- Kopas A **harakteristiskā funkcija** ir funkcija $h_A \colon \Omega \to \{0, 1\}$, kur $h_A(x) = \begin{cases} 1 & x\in A, \\ 0 & x\notin A. \end{cases}$

---

1. **Iesildīšanās:** Izlemiet, kuri apgalvojumi ir patiesi un kuri ir aplami.
   (a) Kopa ir pati sava apkškopa.
   (b) Tukšai kopai nav apakškopu.
   (c) Divu kopu apvienojums ir vienmēr lielāks par to šķēlumu.
   (d) Divu kopu apvienojums nekad nav mazāks par to šķēlumu.
2. Pierādiet sekojošās kopu attiecības, kur A, B, C ir kopas.
   (a) $(A \cap C) \times (B \cap C) \subseteq A \times B$
   (b) $(A \setminus C) \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (C \times C)$
   (c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
3. Jums ir dotas kopa $A = (-\infty, 0]$, $B = [0, \infty)$, $C = (-1, 1)$ kā $\mathbf{R}$ apakškopas.
   (a) Uzzīmējiet funkcijas $h_A + h_B + h_C$ grafiku, intervālā $[-3, 3]$.
   (b) Uzzīmējiet funkcijas $h_A \cdot h_B \cdot h_C$ grafiku, intervālā $[-3, 3]$.



   (c) Kāda jau Jums zināma funkcija ir $x \cdot h_B - x \cdot h_A$?
4. (a) Izmantojot funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, pierādiet, ka $(0, 1)$ un $(1, \infty)$ ir ekvivalentas kopas.
   (b) Izmantojot funkciju $g(x) = e^x$, pierādiet, ka $(-\infty, \infty)$ un $(0, \infty)$ ir ekvivalentas kopas.
   (c) Pierādiet, ka $(0, \infty)$ un $(1, \infty)$ ir ekvivalentas kopas.

5. Jums ir dota funkcija $f\colon (0,1) \to \mathbf{R}$, kur $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{ja } x = \frac{1}{2^k} \text{ kādam } k \in \mathbf{Z}, \\ x & \text{citādāk.} \end{cases}$

   (a) Uzzīmējiet funkcijas f grafiku.

   (b) Pierādiet, ka f ir injekcija.

   (c) Kas ir f vērtību kopa?

6. Jums ir doti $a, b \in \mathbf{R}$ ar $a < b$. Izmantojot iepriekšējo jautājumu:

   (a) Pierādiet, ka (a, b) un $(a, b]$ ir ekvivalentas kopas.

   (b) Pierādiet, ka $(-1, 1)$ un $[-1, 1]$ ir ekvivalentas kopas.

   (c) Pierādiet, ka (a, b) un $[a, b]$ ir ekvivalentas kopas.