

15. septembris

1. **Iesildīšanās:** Izlemiet, kuri secinājumi ir patiesi, un kuri ir nepatiesi. A, B, C ir kopas.

- | | |
|---------------------------------|---|
| (a) $A \cup \emptyset = A$ | (f) $A \setminus B = A \Delta B$ |
| (b) $A \cap \emptyset = A$ | (g) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ |
| (c) $A \Delta \emptyset = A$ | (h) $\overline{A} \subseteq A$ |
| (d) $\{\emptyset\} = \emptyset$ | (i) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ |
| (e) $A \cup B = A \cap B$ | (j) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ |

2. Jums ir dotas trīs sekojošās kopas, kur intervāli ir doti kā \mathbf{R} apakškopas:

- $A = [0, 1] \cup [1, 2]$
- $B = \{x \mid x^2 - 2x \leq 0\}$
- $C = ([0, 2] \setminus [1, 2]) \cup (0, 2)$

Izmantojot šīs kopas, pierādiet, ka

- (a) $A = B$
 (b) $A \neq C$
 (c) $B \neq C$

3. Ir dots, ka $a, b \in \mathbf{R}$.

- (a) Pierādiet, ka $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
 (b) Pierādiet, ka $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

4. Atceries moduļa funkciju, kas definēta kā $|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$. Katram reālam skaitlim $a \in \mathbf{R}$ varam definēt tā **pozitīvo daļu** $a^+ := \frac{|a|+a}{2}$ un tā **negatīvo daļu** $a^- := \frac{|a|-a}{2}$.

- (a) Pierādiet, ka $a = a^+ - a^-$ un $|a| = a^+ + a^-$.
 (b) Pierādiet, ka

$$a^+ = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ 0 & a \leq 0 \end{cases} \quad \text{un} \quad a^- = \begin{cases} 0 & a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}.$$